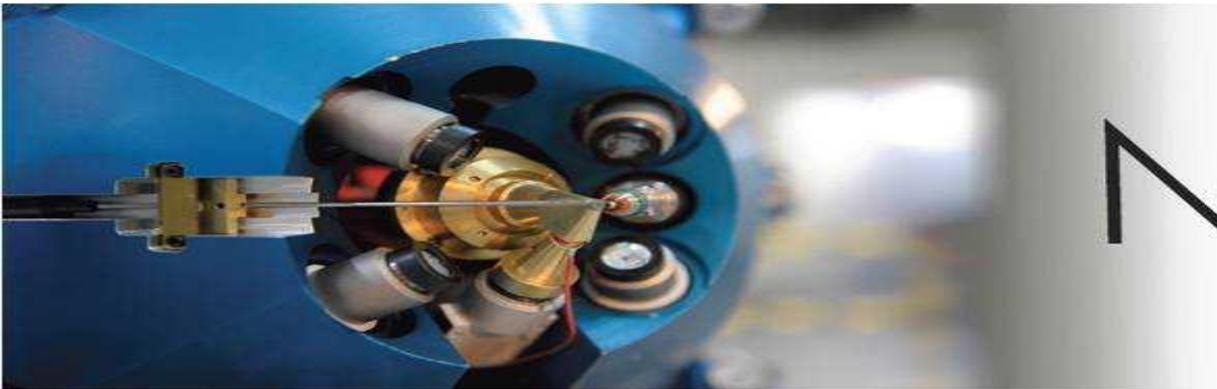


Synthèse pratique du GUM et des méthodes associées Pour L'expression des incertitudes de mesure.

Jean-Paul Berthet

FR 3506



NEWAGLAE

Sommaire

Introduction

3 bonnes raisons pour calculer ses incertitudes

Vocabulaire spécifique et commun entre métrologue

Quelques méthodes possibles pour évaluer ses incertitudes

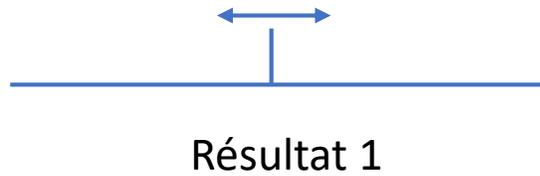
Processus modélisable

Processus non modélisable

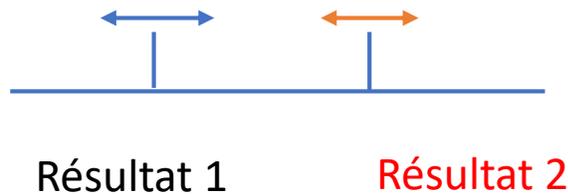
Conclusions

L'incertitude pour quoi faire ?

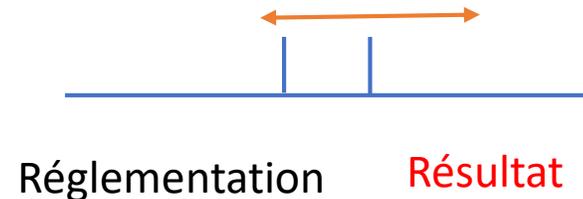
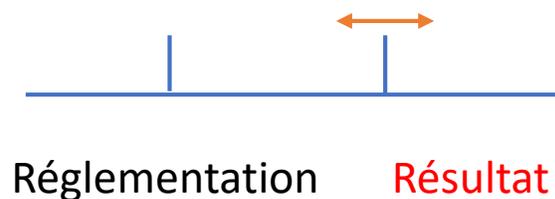
Pour quantifier la qualité de la mesure



Pour comparer entre deux résultats

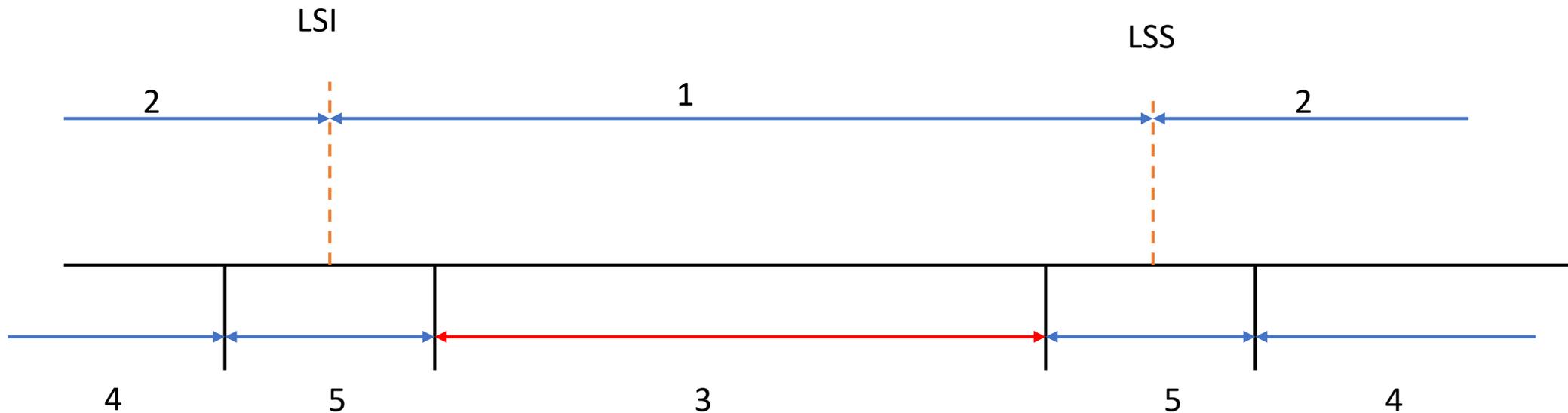


Pour comparer un résultat à une limite ou une consigne



Examen de conformité à une spécification

- La largeur assignée à la zone de doute dépend en général de conventions ou de recommandation normative (NF ISO 14253-1)



LSI: Limite de spécification inférieur
LSS: Limite de spécification supérieur

- 1 Zone de spécification
- 2 Hors spécification
- 3 Zone de conformité
- 4 Zone de non-conformité
- 5 Zone de « doute » ou plage d'incertitude

Vocabulaire spécifique (VIM)

Dérive

Variation continue ou incrémentale dans le temps d'une indication, due à des variations des propriétés métrologiques d'un instrument de mesure

Justesse

Etroitesse de l'accord entre la moyenne d'un nombre infini de valeurs mesurées répétées et une valeur de référence.

Vocabulaire spécifique (VIM)

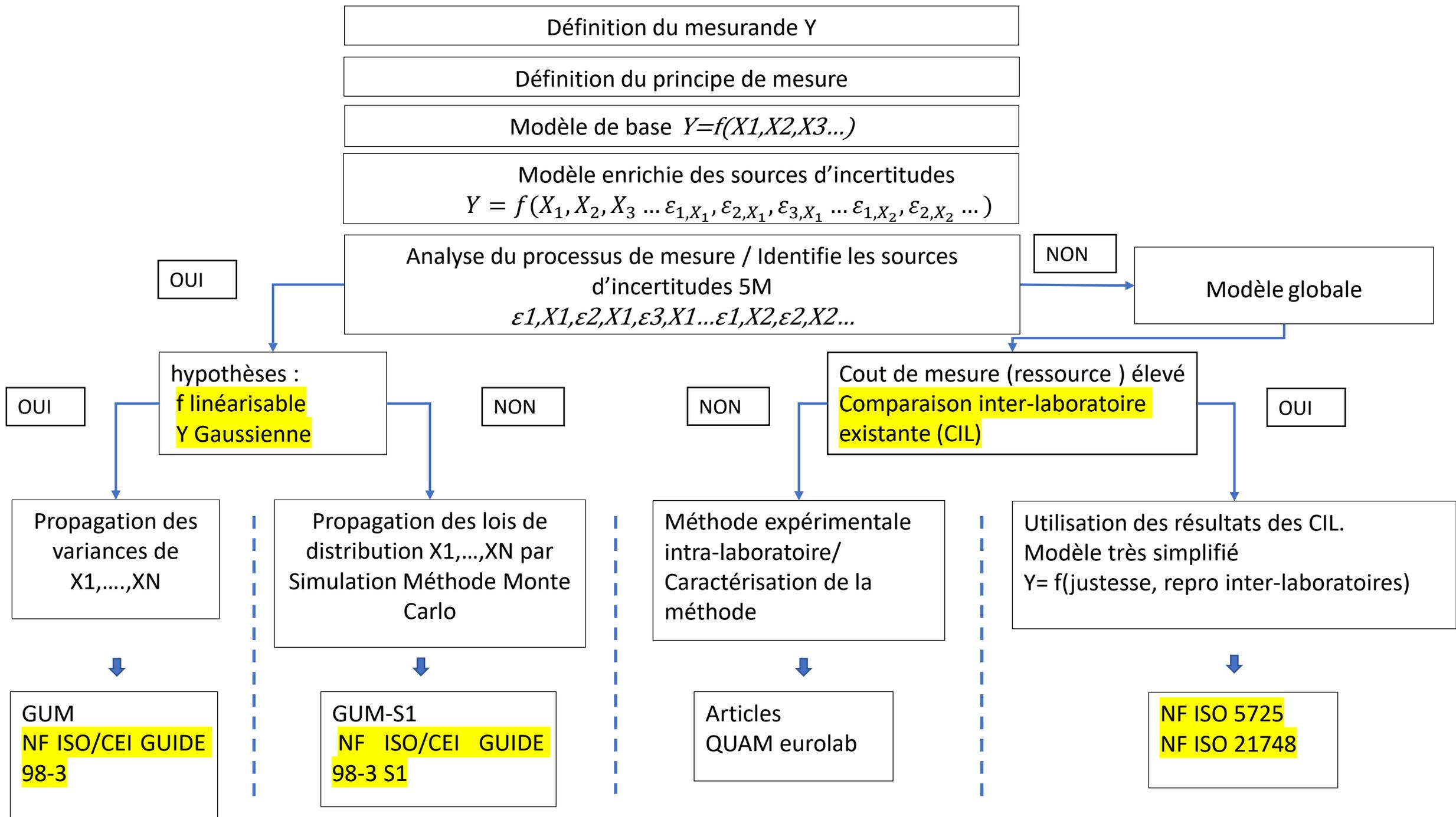
Reproductibilité

Fidélité de mesure selon un ensemble de conditions de reproductibilité. La reproductibilité représente l'estimation de la dispersion qui serait observée globalement en réalisant un mesurage ou un essai, dans l'un des quelconques laboratoires.

Répétabilité

Fidélité de mesure selon un ensemble de conditions de répétabilité

Quelques méthode possibles pour évaluer ses
incertitudes



Définition du mesurande Y

Définition du principe de mesure

Modèle de base $Y=f(X_1,X_2,X_3\dots)$

Modèle enrichie des incertitudes

$$Y = f(X_1, X_2, X_3 \dots \varepsilon_{1,X_1}, \varepsilon_{2,X_1}, \varepsilon_{3,X_1} \dots \varepsilon_{1,X_2}, \varepsilon_{2,X_2} \dots)$$

oui

Analyse du processus de mesure / Identifie les sources d'incertitudes 5M

$\varepsilon_{1,X_1}, \varepsilon_{2,X_1}, \varepsilon_{3,X_1} \dots \varepsilon_{1,X_2}, \varepsilon_{2,X_2} \dots$

non

Synthèse pratique du GUM et des méthodes associées

Oui

Il est possible d'identifier toutes les sources d'incertitudes

Propagation des variance ? **OU** simulation de Monte Carlo ?

Le modèle est-il linéaire ?

La distribution des résultats suit une loi Normale ?

Propagation des variances OU simulation de Monte Carlo

- Méthode d'estimation « analytique » (GUM –NF ENV 13005, NF FDX 07-21)
 - Inventaire des causes d'erreur, estimation des corrections à appliquer, évaluation de chaque contribution à l'incertitude.
 - Modélisation et composition des différentes contributions (propagation)
 - Prise en compte de la répétabilité
- Propagation des distribution GUM-S1 Monte Carlo
 - Inventaire, correction, composition et analyse de variance

Hypothèse linéaire et Gaussien (GUM)

Méthode d'estimation « analytique » éprouvée

Avantages	Inconvénients
<ol style="list-style-type: none">1. Réalisable en interne de manière relativement autonome .2. Permet d'accéder à la part d'incertitude de chaque grandeur d'entrée3. L'incertitude peut s'exprimer sous forme analytique4. Méthode itérative qui permet de se focaliser sur les paramètres principaux	<ol style="list-style-type: none">1. Nécessité de pouvoir écrire une équation reliant toutes les sources d'incertitude au mesurande2. Approximation linéaire du modèle valide3. les sources d'incertitudes doivent être symétriques4. Choix de la loi et de l'intervalle de l'évaluation type B lié à l'expérience du métrologue
Évaluation individuelle des sources d'incertitude	risque d'oublier des composantes d'incertitude

Hypothèse non-linéaire Monte Carlo

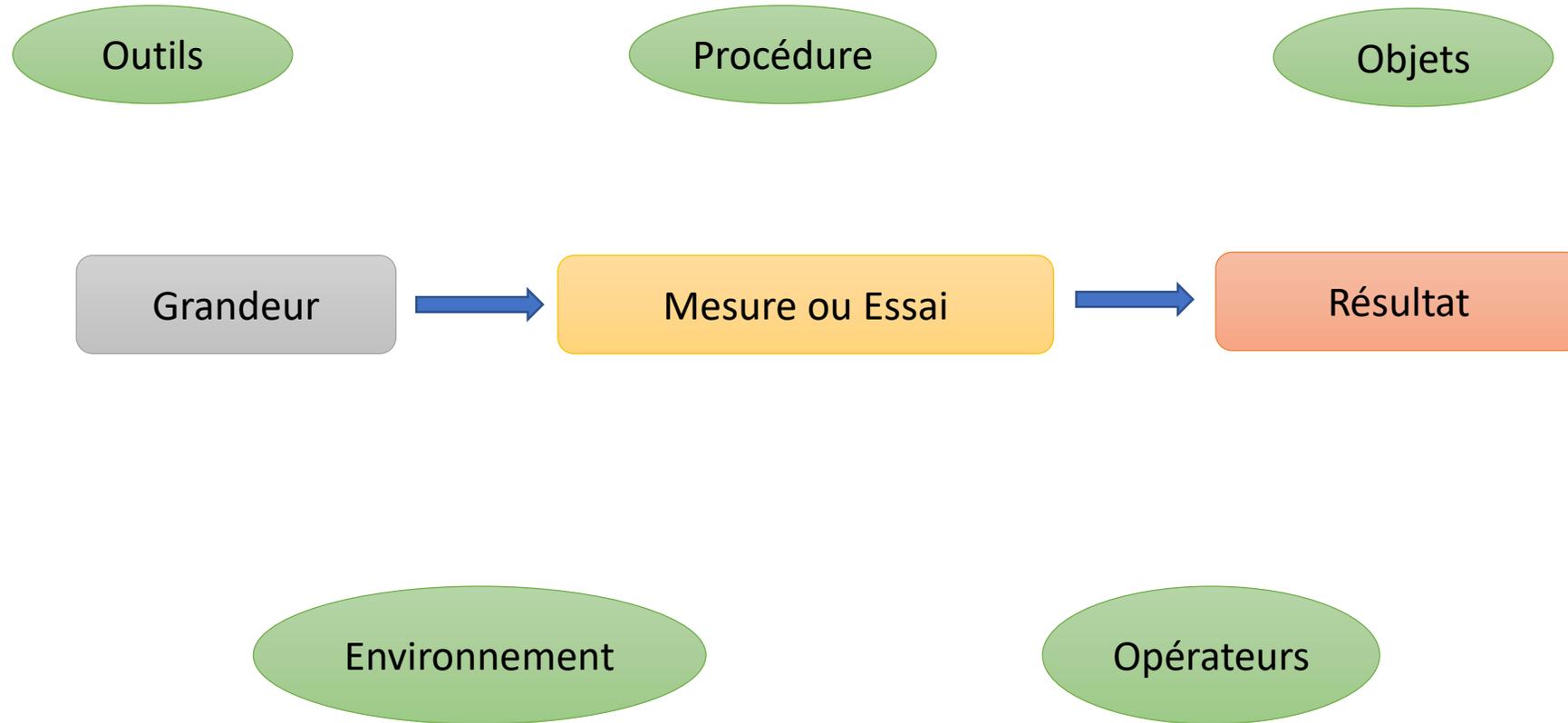
Avantages

- Réalisable en interne de manière relativement autonome
- Pas d'hypothèse de linéarité
- Modèle de mesure complexe ou algorithmique possible
- Évaluation individuelle des sources d'incertitude
- Permet de connaître la loi de distribution du résultat (non Gaussien)*
- Méthode itérative qui permet de se focaliser sur les paramètres principaux
- Possibilité de traiter plusieurs grandeurs de sortie (mesurandes multiples)- Existence de logiciels (gratuits)

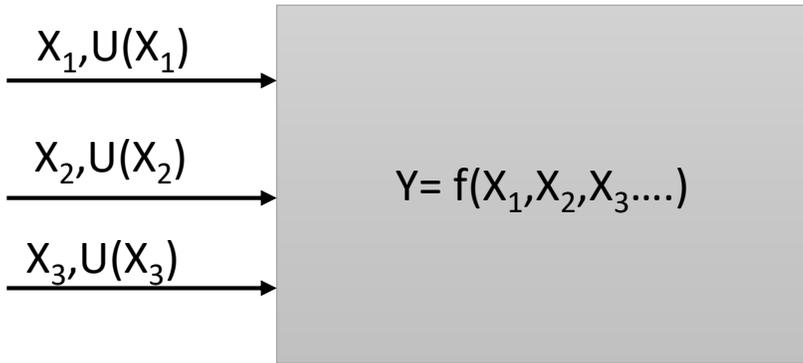
Inconvénients

- Nécessité de pouvoir écrire le modèle reliant toutes les sources d'incertitude au mesurande
- Risque d'oublier des composantes d'incertitude
- Résultat ponctuel : besoin de plusieurs simulations pour avoir une idée du comportement sur un intervalle.
- Disposer d'un outil informatique spécifique
- si on change une source d'incertitude, il est nécessaire de refaire tourner tout le programme

Inventaire des causes d'erreur



Propagation de l'incertitude (GUM)

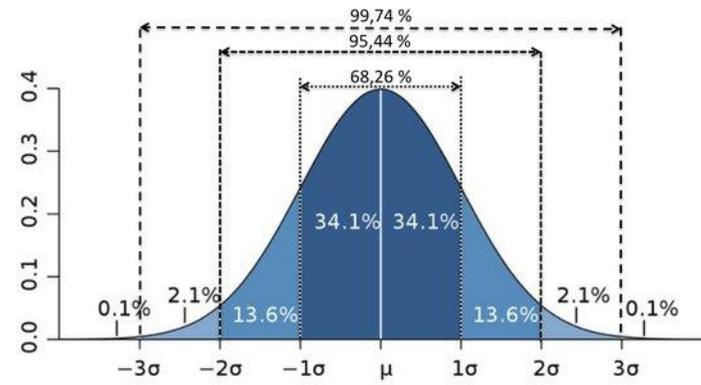
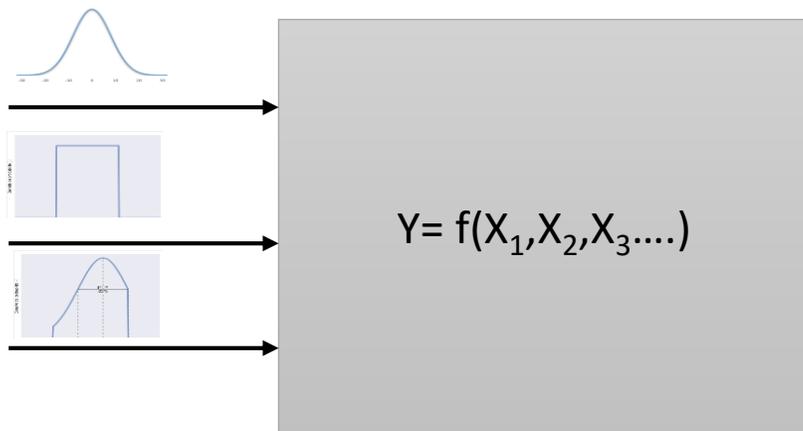


$$u_c^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u(x_1, x_2)$$

$\bar{y} \quad U(\bar{y})$

$Y \pm U$

Propagation des distributions (GUM-S1)



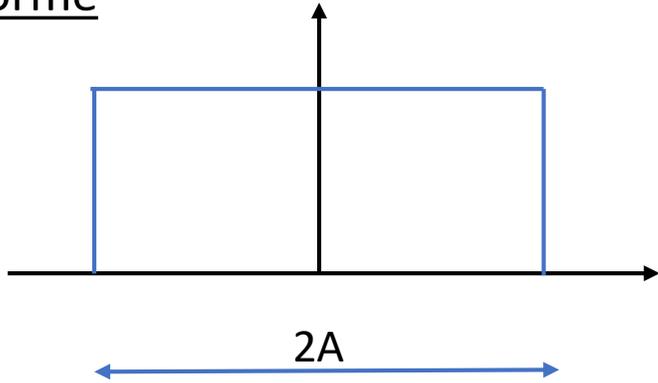
$\bar{y} \quad U(\bar{y})$

$[y_{Low}, y_{High}]$

Composition des différentes contributions

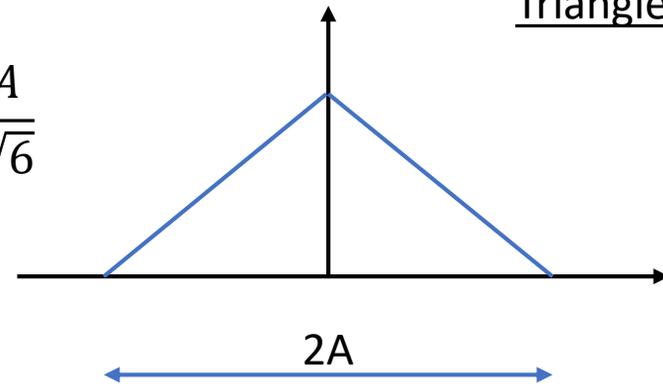
Uniforme

$$\sigma = \frac{A}{\sqrt{3}}$$



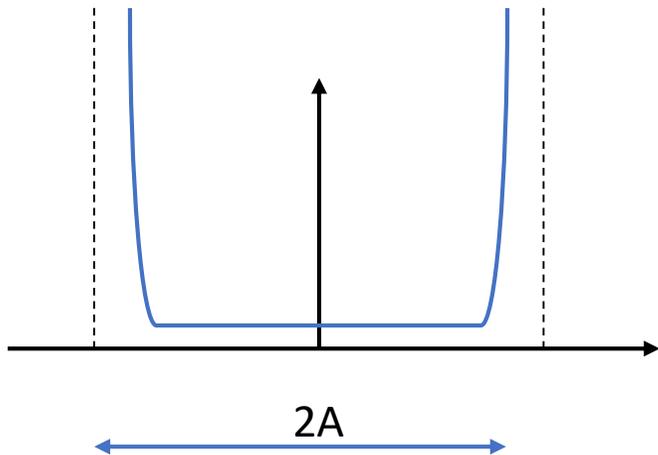
Triangle

$$\sigma = \frac{A}{\sqrt{6}}$$

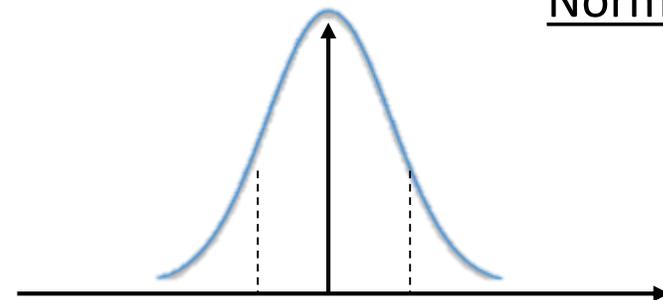


Arc sinus

$$\sigma = \frac{A}{\sqrt{2}}$$



Normale



σ correspond à l'abscisse au point d'inflexion

Estimateurs quantitatifs

- Valeur centrale

La **moyenne** estime l'espérance mathématique de la loi de probabilité

Pour un échantillon de taille croissante, la moyenne est **de plus en plus proche** de la valeur vraie caractérisant l'ensemble de la population

- Dispersion

La **variance** d'échantillon estime sans biais la variance mathématique de la loi de probabilité.

(N-1) est le nombre de degrés de liberté de l'échantillon statistique

Pour un échantillon de taille croissante, la variance d'échantillon est de **plus en plus proche** de la dispersion caractérisant l'ensemble de la population, mais sa convergence est lente...

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

Répétabilité et nombre de mesurages

- Influence du nombre de mesurages

Pour la dispersion: Les N mesurages sont supposés indépendants on estime toujours la même quantité S associée à la dispersion d'un mesurage les estimateurs sont plus efficaces dans le cas gaussien

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

$$\frac{\sqrt{v(s^2)}}{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2(N-1)}}$$

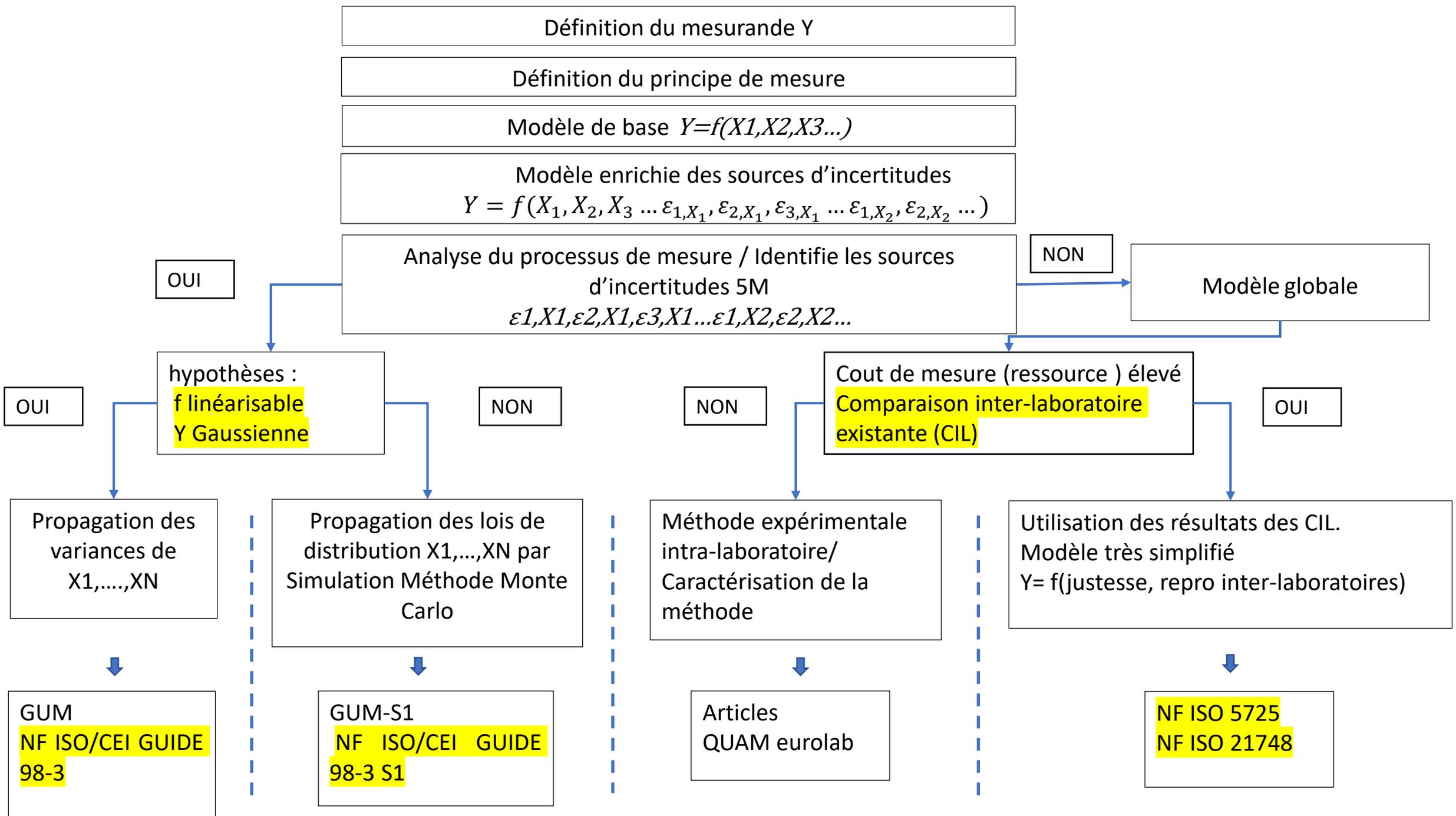
- Pour la valeur centrale

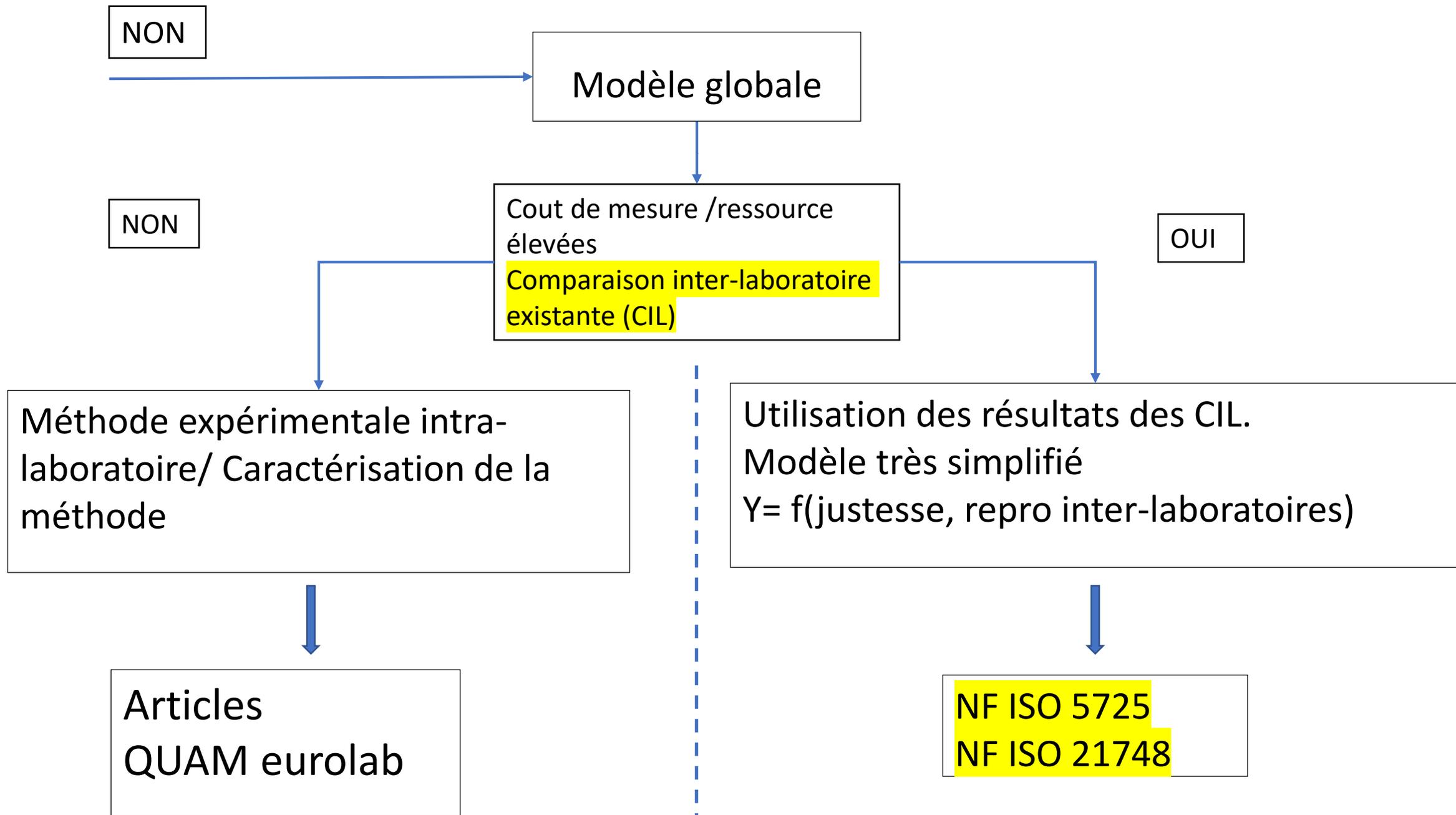
La dispersion de la moyenne de N mesurages est réduite d'un facteur « racine de N »

$$v(\bar{x}) = \frac{s^2}{N} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Le mesurande ne peut pas être modélisé

- a) Validation des méthodes
- b) Comparaison inter-laboratoires





Méthode expérimentale intra-laboratoire/Caractérisation de la méthode

Intérêts-points positifs

Cette méthode est intéressante dans les cas suivants

- Le modèle de mesure est complexe
- La quantification individuelle des sources d'incertitude est difficile et/ou non nécessaire
- En absence d'inter-comparaison/ de circuit inter-laboratoire possible existant

L'évaluation de l'incertitude prend alors en compte

- L'incertitude globale liée à la fidélité de la méthode
- L'incertitude globale liée à la justesse de la méthode
- La contribution de facteurs d'incertitude non pris en compte lors des essais de validation

Méthode expérimentale intra-laboratoire/Caractérisation de la méthode

Les Normes

- Pour les méthodes chimiques et physico-chimiques dans le domaine de l'analyse de l'eau, la norme NF T90-210
- La norme **NF ISO 11352** propose alors une méthode d'évaluation des incertitudes utilisant ces données via une estimation des erreurs aléatoires à partir des données de reproductibilité intra-laboratoire
- La norme V03-110 pour le domaine de l'analyse des produits agricoles et alimentaires

Méthode expérimentale intra-laboratoire/Caractérisation de la Avantages / Inconvénients

Avantages	Inconvénients
Méthode expérimentale permettant une estimation au plus proche des performances réelles Réalisable en interne	Nécessite la réalisation d'essais ce qui peut être long à mettre en œuvre Réévaluation compliquée Valider l'hypothèse de la prise en compte de toutes les incertitudes
Estimation globale de l'incertitude	Sources d'incertitude groupées Les sources d'incertitudes prépondérantes ne sont pas identifiables

Comparaison Inter-Laboratoire

Objectif/ exemples de cas d'utilisation

Les objectifs :

- performance labo : Essais d'aptitude,
- performance méthode – attribution d'une valeur de référence

Dans quels cas:

- Equipement spécifique Etalons nationaux et instruments scientifique
- Prototype industriel de niche technologique

Utilisation des résultats des CIL

Normes

	ISO 5725	ISO 13528
Pre requis	pour tous les laboratoires <u>Même mesurande,</u> <u>même méthode</u>	pour tous les laboratoires <u>Même mesurande</u>
Cas 1 : Pas de valeur de référence	Justesse (par rapport à une Valeur vrai consensuelle)	
	Reproductibilité	
Cas 2: Valeur de référence (MRC ou laboratoire)	Répétabilité de la méthode	
	Justesse (par rapport à Valeur Vrai du laboratoire de « Référence » ou MRC)	
	Reproductibilité	
	Répétabilité de la méthode	

Comparaison Inter-Laboratoire

Avantages/inconvénients

Avantages	Inconvénients
Méthode d'évaluation d'incertitude possible même dans le cas d'un modèle analytique d'un processus de mesure complexe	
Méthode expérimentale permettant une estimation au plus proche des performances réelles	Besoin de plusieurs intervenants : Nécessite la réalisation d'essais, Réévaluation compliquée Valider l'hypothèse de la prise en compte de toutes les sources i.e. toutes les sources se sont-elles exprimées
Estimation globale de l'incertitude	Comme les sources sont groupées, les sources prépondérantes ne sont pas identifiables.

Répétabilité- reproductibilité

Pour chaque série h, on dispose de N répétition:

Série 1 X11,X12,X13.....X1n

Série 2 X21,X22,X23.....X2n

Série k Xh1,Xh2,Xh3.....Xhn

Pour chaque série on calcule la moyenne et l'écart-type expérimental

$$\bar{x}_h = \frac{\sum_{i=1}^n x_{hi}}{n}$$

$$s_h = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{hi} - \bar{x}_h)^2}{n - 1}}$$

Répétabilité et reproductibilité

Répétabilité

L'écart-type associé à la répétabilité est obtenu à partir de la moyenne des variances associées à chaque laboratoire

$$s_r = \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{\sum_{h=1}^k s_h^2}$$

s_r^2 représente la meilleure estimation qui peut être faite de la répétabilité, sous réserve que celle-ci puisse être considérée comme identique dans les différents laboratoires. On parle généralement de « variance intra-laboratoire », ou « intra-série » ou encore « court terme »

Répétabilité et reproductibilité

Reproductibilité

La variance associée à la reproductibilité est obtenu par la somme du carré des écarts de chaque moyenne à la moyenne générale à laquelle on ajoute la variance de répétabilité

$$S_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \bar{x}_g)^2}{(k-1)} + \left(\frac{N-1}{N}\right) S_r^2$$

S_R^2 représente l'estimation de la dispersion qui serait observée globalement en réalisant **un** mesurage ou **un** essai, dans l'un des laboratoire quelconques

Répétabilité et reproductibilité

L'effet laboratoire

L'écart type associé à la dispersion créée par l'influence des effets constants à l'intérieur d'un laboratoire mais variant d'un laboratoire à l'autre est noté S_L

$$s_L = \sqrt{\frac{S_R^2 - S_r^2}{n}}$$

S_L caractérise l'impact des causes d'erreur qui ne se manifestent que lorsque l'on change de laboratoire.

On ne peut accéder directement à S_L , car tous les résultats de mesure sont affectés par la répétabilité. Etudier les contributions à la dispersion globale en analysant, part après part, les différents composants en comparant des situations expérimentales, c'est pratiquer une « analyse de variance » pour le processus de mesures ou d'essais.

Conclusion

J'espère vous avoir montré qu'il y a plusieurs manières d'évaluer les incertitudes.

Toutes ces manières sont chronophage et certaines sont particulièrement coûteuses et ne peuvent être réalisées que dans un cadre bien défini.

Je vous ai montré qu'il existe plusieurs documents disponibles qui vous serviront de guide. Certains comme le VIM et le GUM sont gratuits sur le site du BIPM. Les normes sont payantes sur le site de l'Afnor pour la version française et auprès de l'ISO pour la version en anglais.

Besoin/contrainte	GUM (JCGM 100)	Monte Carlo (JCGM 101)	intra-laboratoire	Comparaison inter-laboratoires
Effectuer l'estimation en autonomie	++	++	+	--
Besoin d'une estimation continue de l'incertitude sur un domaine	++	+	-	-
		Monte-Carlo ne donne pas de résultat analytique, mais la simulation une fois construite peut facilement être relancée au point de travail	Il est possible de linéariser les résultats effectués à différents niveaux	Il est possible de linéariser les résultats de CIL effectués à différents niveaux
Analyse des causes d'incertitudes	++	++	--	-
		Identifie l'impact des paramètres de l'étude. Cela permet une utilisation de l'incertitude de mesure pour améliorer un processus de mesure en ne travaillant que sur les paramètres influents		Il est possible d'introduire des fidélités intermédiaires supplémentaire dans le programme de CIL (ISO-5725-3) à condition d'avoir préparé la campagne d'essai en conséquence.
Justesse et reproductibilité de la méthode	-	-	+	++ (ISO 5725)
Processus de mesure non modélisé	--	-	+	++
		Un algorithme peut être suffisant		

Exemple

Série de mesure						
Marine	Laurent	Sibylle	Quentin	ELisa	Brice	
42,00	48,40	42,10	43,30	50,00	41,80	
42,80	41,20	49,10	48,80	40,30	48,30	
49,00	42,50	44,20	44,40	48,20	45,00	
45,80	45,40	48,00	44,90	43,20	48,30	
49,30	45,40	43,20	48,90	40,50	49,80	
46,20	49,30	43,80	44,40	45,20	48,90	
42,50	41,90	50,00	49,80	46,70	40,60	
42,60	45,30	48,40	45,50	41,80	40,20	
44,30	47,10	42,50	46,10	49,20	41,50	

Exemple (suite)

	Traitemant				
	série	nombre d'échantillon	moyenne	variance	(moy-moy.géné)^2
	Marine	9	44,94	7,860277778	0,149797668
	Laurent	9	45,17	8,115	0,027163923
	Sibylle	9	45,70	9,7425	0,135805898
	Quentin	9	46,23	5,51	0,813336763
	Elisa	9	45,01	13,95361111	0,102637174
	Brice	9	44,93	15,61	0,158521948
somme		54			1,387263374
moy générale			45,33		
nb de série	6				
DDL répéta	48				
DDI repro	5				

Exemple (suite)

S ² répéta	S ² Repro (MP)	Fractil (MP)	bornes sup	borne inf	p value (MP)
10,13189815	10,22172308	1,008865558	2,84436778	0,16263131	0,422830685

- Les dispersions r et R sont égales, les deux estimateurs de la même quantité suivent des comportements statistiques définies.
- Un test statistique est possible
- Le Fractil est entre les bornes sup et inf
- La p_value est proche supérieur au seuil alpha de 5% donc on ne peut pas rejeter l'hypothèse H_0

Exemple 2

Série de mesure					
Marine	Laurent	Sibylle	Quentin	Elisa	Bris
42,00	48,40	42,10	43,30	70,00	41,80
42,80	41,20	49,10	48,80	60,30	48,30
49,00	42,50	44,20	44,40	68,20	45,00
45,80	45,40	48,00	44,90	63,20	48,30
49,30	45,40	43,20	48,90	60,50	49,80
46,20	49,30	43,80	44,40	65,20	48,90
42,50	41,90	50,00	49,80	66,70	40,60
42,60	45,30	48,40	45,50	61,80	40,20
44,30	47,10	42,50	46,10	69,20	41,50

Exemple 2

	Traitement				
	série	nombre d'échantillon	moyenne	variance	(moy-moy.géné)^2
	Marine	9	44,94	7,860277778	13,84115569
	Laurent	9	45,17	8,115	12,23704047
	Sibylle	9	45,70	9,7425	8,790126886
	Quentin	9	46,23	5,51	5,912102195
	Elisa	9	65,01	13,95361111	267,2014026
	Brice	9	44,93	15,61	13,92395405
somme		54			321,9057819
moy générale			48,66		
nb de série	6				
DDL répéta	48				
DDI repro	5				

Exemple 2

S ² répéta	S ² Repro (MP)	Fractil (MP)	bornes sup	borne inf	p value (MP)
10,13189815	74,32542678	7,335785032	2,844367776	0,16263131	3,56001E-05

- Le fractil est en dehors de l'intervalle
- Les estimateurs r et R ne sont pas égaux
- La p_value est très petite on rejette l'hypothèse H0